



УрГУ

Екатеринбург

Вдовина Э.В.

**Об иллюстрационном (компьютерном)
сопровождении курса
«Обыкновенные дифференциальные
уравнения».**

Vdovina E.V.

**To a question on illustrative support of a rate
" The Ordinary differential equations ".**

Для лучшего усвоения курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» имеет смысл сопровождать его чтение иллюстрационным приложением, тем более, что содержание курса открывает для этого огромные возможности.

К темам, которые наглядно иллюстрируются, можно отнести следующие:

I. Для уравнений первого порядка:

1. Построение интегральных кривых по полю направлений.
2. Геометрические свойства решений дифференциальных уравнений.
3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
4. Проблемы продолжаемости решений.
5. Поведение интегральных кривых в окрестности границы области существования решений.

II. Для систем дифференциальных уравнений:

1. Фазовые портреты на плоскости и в пространстве.
2. Вопросы устойчивости решений.

Для уравнения $x \frac{dy}{dx} = 2y$ семейство интегральных кривых построим по полю направлений.

К	α	Изоклины
$-1\sqrt{3}$	-60°	$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-30°	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
0	0°	$y=0$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	30°	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
1	45°	$y=x$
$\sqrt{3}$	60°	$y = \sqrt{3}x$
∞	90°	$x=0$

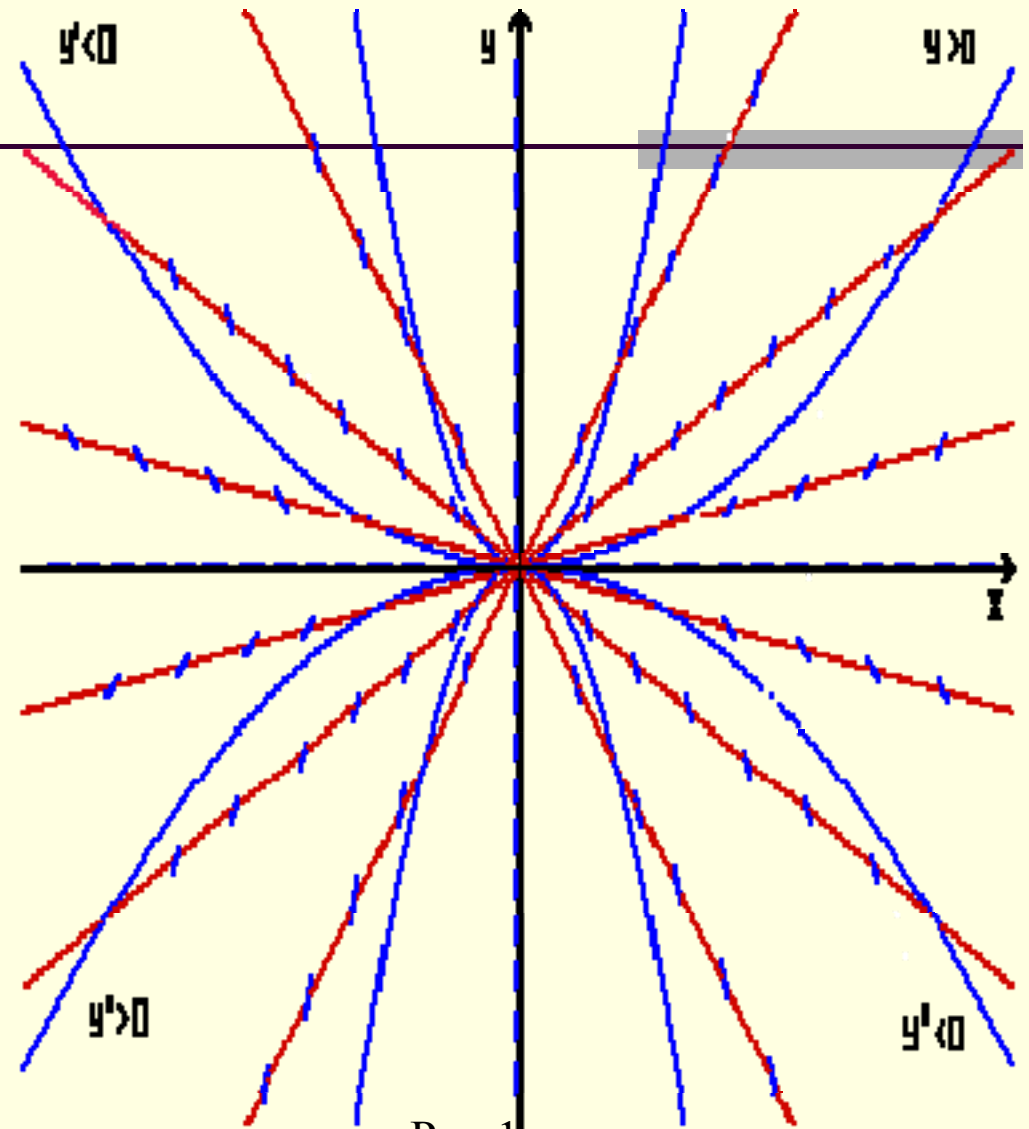


Рис.1.

Уравнение $y' = f(y)$ (1)

является уравнением с разделяющимися переменными.

Соотношение $x = C + \int dy / f(y)$ (2)

определяет его общий интеграл.

С точки зрения геометрии (2) задаёт семейство интегральных кривых, которое может быть получено из одной интегральной кривой, например,

$y = \int dy / f(y)$, её параллельным сдвигом на отрезок C вдоль оси Ox .

На рис.2 изображено семейство интегральных кривых

$x = -10\cos y - y^2 + C$ уравнения $x' = 10\sin y - 2y$.

y^2

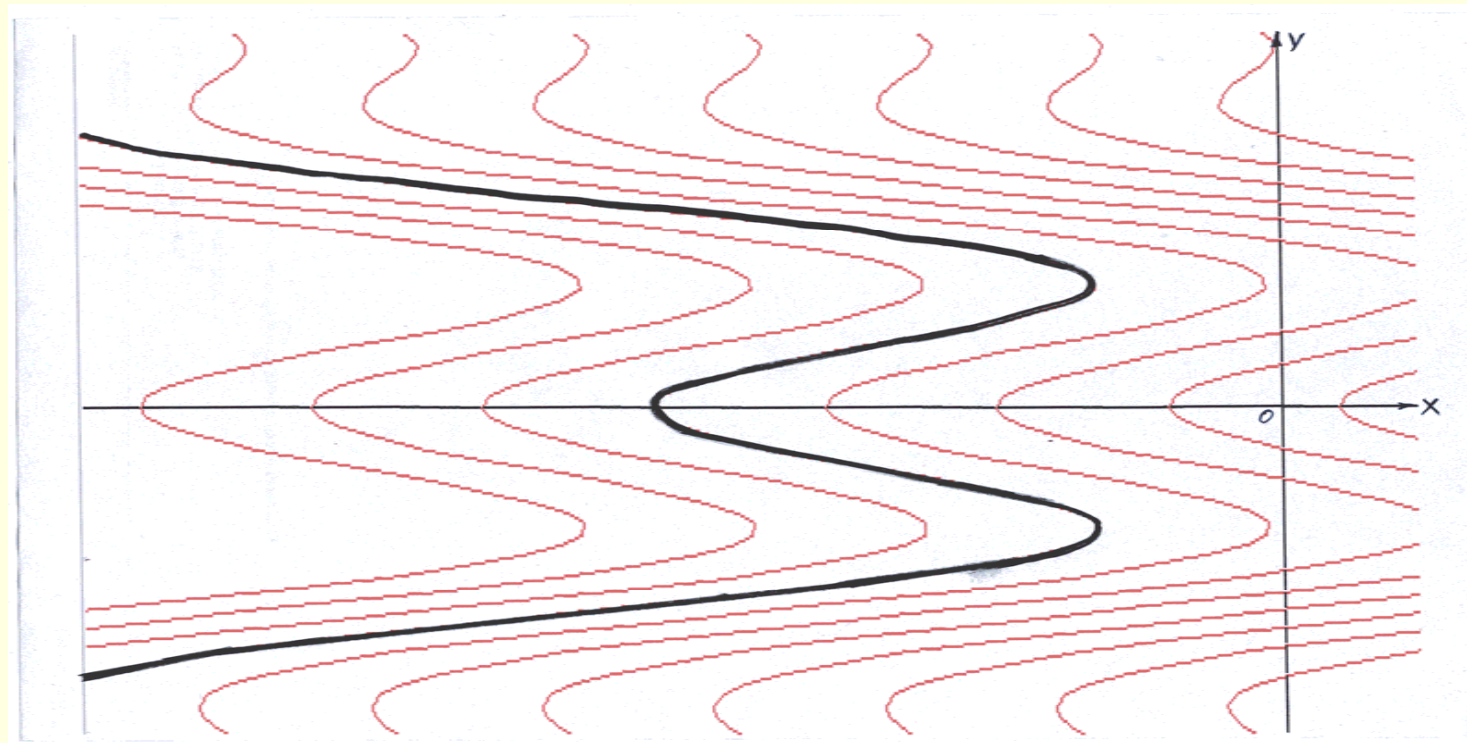


Рис.2

■ При работе с уравнениями 1-го порядка удобно использовать стандартный пакет ODE – Ordinary Differential Equations.

(Московский энергетический институт).

Пакет предоставляет большие возможности: можно работать

■ с уравнениями от 1-го до 6-го порядка, а также с системами от 2-го до 6-го порядка, как автономными, так и неавтономными. Можно строить интегральные кривые, поле направлений, фазовые портреты, проекции на различные плоскости.

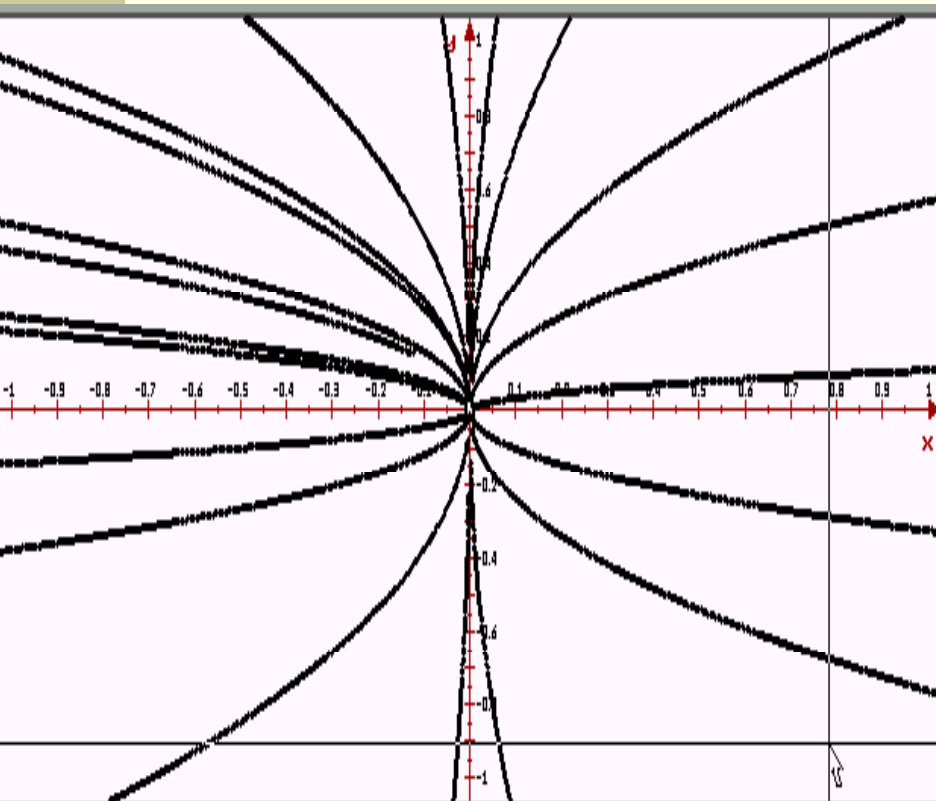
■ При работе с системами были составлены специальные программы: для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами (ЛОПК) 2-го порядка, зависящими от параметра с построением фазовых портретов и репроектированием в 3-хмерное пространство;

■ для ЛОПК 2-го и 3-го порядков с полной классификацией разновидностей фазовых портретов и их построением;

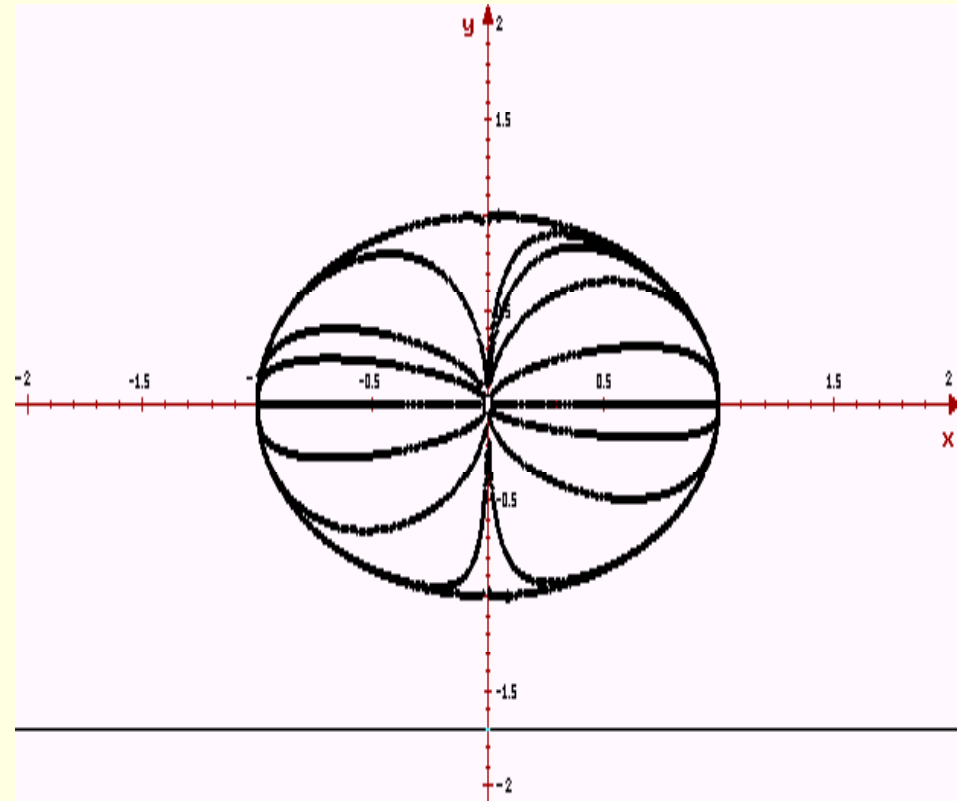
для иллюстрации понятий устойчивости и др.

Пусть $(0,0)$ - для системы $\begin{cases} \dot{x} = a_0 x + a_1 y, \\ \dot{y} = b_0 x + b_1 y \end{cases}$
неустойчивый узел,

имеем на круге Пуанкаре 4 положения равновесия:
2 устойчивых узла и 2 седла.



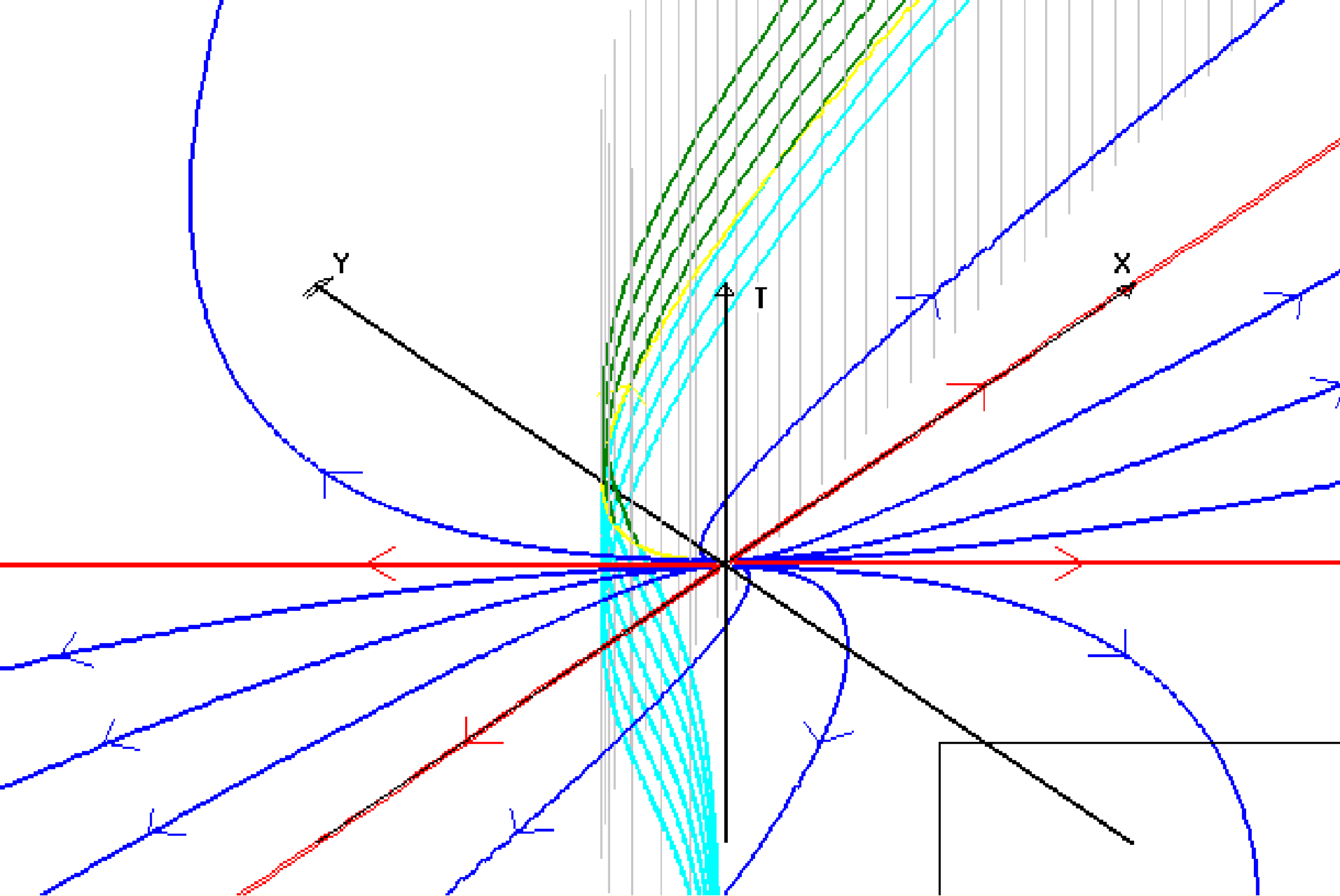
На плоскости



В круге Пуанкаре

■ С использованием машинной графики переход от фазового портрета к семейству интегральных кривых можно сделать весьма наглядным. Если фазовый портрет для автономной системы II порядка может быть получен путем проектирования семейства интегральных кривых вдоль оси $0t$ на фазовую плоскость xOy , то для перехода от фазового портрета к семейству интегральных кривых можно использовать обратный процесс - процесс репроектирования.

■ В трехмерном пространстве строится цилиндр, в котором за направляющую берется фазовая траектория, а в качестве образующих рассматриваются прямые, параллельные оси $0t$. Сами же интегральные кривые, лежащие на цилиндре, строятся по фазовой траектории с учетом характера устойчивости положения равновесия, к которому она примыкает.



Репроекция неустойчивого узла.

**Для иллюстрации этого процесса созданы специальные программы.
Вот одна из них.**

Построение фазовых траекторий системы диффузов второго порядка

**Дана система дифференциальных уравнений
с параметром J :**

$$\begin{cases} dx/dt = J(J-1)x + y \\ dy/dt = (J-1)y \end{cases}$$

**Фазовый портрет этой системы зависит от
различных значений переменной J:**

- При $J < 0$ это будет седло;
- При $J > 1$ -/ неустойчивый узел;
- При $0 < J < 1$ -/ устойчивый узел;
- Для $J = 1$ и $J = 0$ вырожденные случаи

**Иллюстрационное приложение строит гра-
ки интегральных кривых для вышеописанной
системы.**

Ввести параметр J для вывода на экран фазовых траекторий

Выход из программы

**Система дифференциальных
уравнений
(параметр J=5)**

$$\begin{cases} dx/dt = 20x + y \\ dy/dt = 4y \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$q1 = 20 \quad q2 = 4$$

Собственные вектора

$$X1 = (1, 0) \quad X2 = (1, -16)$$

Фазовые траектории образуют

неустойчивый узел

Показать график

Отмена

Интегральные кривые определяются двумя произвольными постоянными следующим образом :

$$x = c1 * \exp(h1 * t) + c2 * \exp(h2 * t)$$

$$y = c2 * (h1) * \exp(h2 * t)$$

возможны несколько случаев

Return

Выберите кривую

- C1 = 0 C2 > 0
- C1 = 0 C2 < 0
- C2 = 0 C1 > 0
- C2 = 0 C1 < 0
- C1 > 0 C2 < 0
- C1 < 0 C2 > 0
- C1 > 0 C2 > 0
- C1 < 0 C2 < 0

Определение устойчивости по Ляпунову произвольного решения системы дифференциальных уравнений $y' = f(t, y)$

Решение $y = \varphi(t)$ системы $\dot{y} = f(t, y)$ называется

устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\forall y(t) \neq \varphi(t) : |y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

