ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ГЕТЕРОГЕННЫХ ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = F_i(E_1,...,E_n) + D_i \Delta E_i;$$

$$(i = 1,...,n),$$

$(E_1,...,E_n)$ -переменные состояния,

$(F_1,...,F_n)$ - нелинейные функции

$$\Delta E_\mathrm{i} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dE_1}{dt} = f(E_1, E_2) + D_1 \Delta u \\ \dfrac{dE_2}{dt} = \varphi(E_1, E_2) + D_2 \Delta E_2 \end{cases} \Bigg|$$

Точечной системой для исходного уравнения является система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

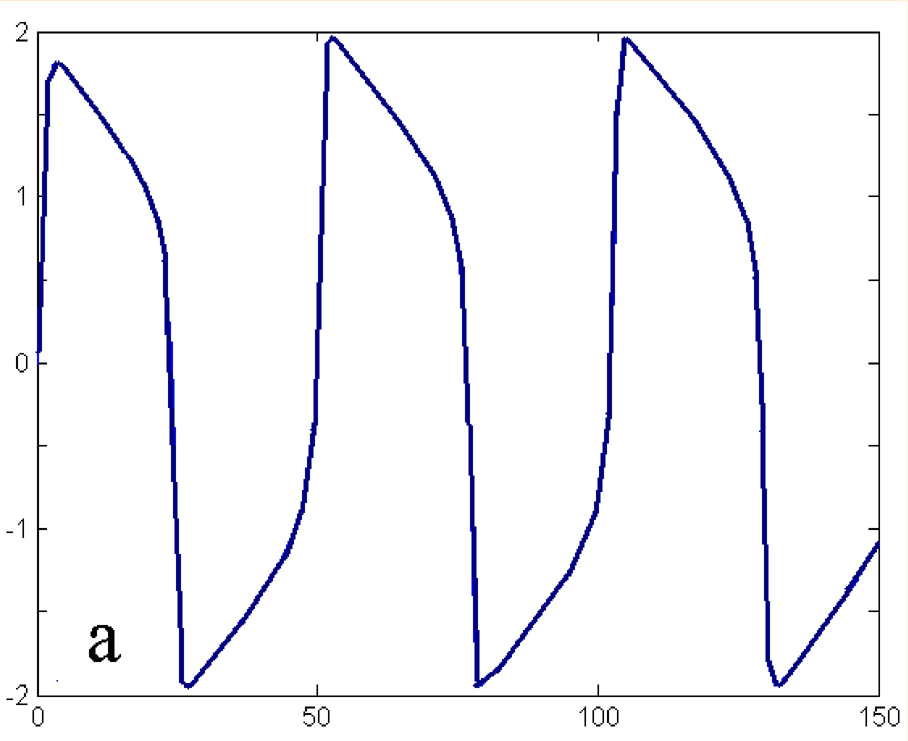
$$\frac{dE_i}{dt} = F(E_1, ..., E_n) \quad (i = (1, ..., n)$$

$$\left\{\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}\frac{d\mathbf{x}}{dt}&=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta_1(t))\\ \frac{d\mathbf{y}}{dt}&=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta_2(t))\end{aligned}\right|\quad,$$

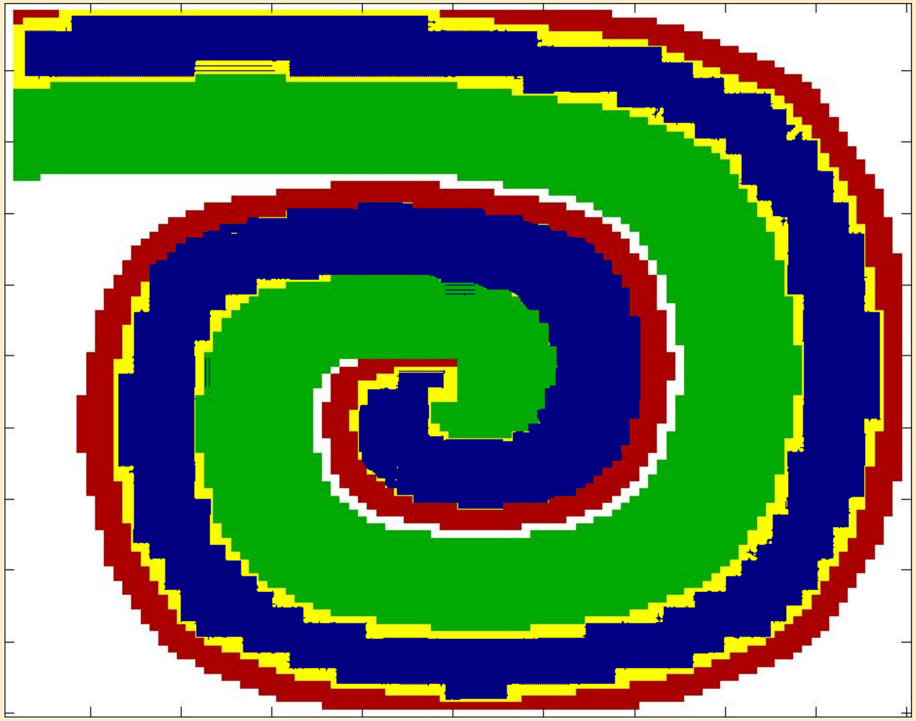
$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_l)$, $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_k)$,

$\boldsymbol{g}=(g_1,\ldots,g_l)$, $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$, $k+l=n$

Для автоволновых процессов система дифференциальных уравнений является жесткой по временной переменной t, а исходная система является жесткой и по пространственным переменным x,y,z.



2
1
0
-1
-2
0
50
100
150
a



Сеточная схема метода прямых для систем нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

Для приближенных вычислений будем использовать метод прямых в сочетании с равномерной прямоугольной сеткой. Рассмотрим в качестве примера одно уравнение параболического типа для двумерной области

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = f_1(E_1) + D_1 \Delta E_1 \qquad \Delta = \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2}$$

$$\frac{dE_{ij1}}{dt} = f_1(E_{ij1}) + \sum\nolimits_{xy} \qquad\qquad i, j = (1, \ldots, N)$$

$$\sum\nolimits_{xy} = \frac{D_1}{h^2}(E_{(i-1)j,1} - 2E_{ij,1} + E_{(i+1)j} + E_{i(j-1),1} - 2E_{ij,1} + E_{i(j+1),1}),$$

где $E_{ij1} \in \tilde{A} \Rightarrow E_{ij1} = E_{01}$; $E_{ij1} \notin \tilde{A} \Rightarrow E_{ij1} \neq \varphi_{ij1}(ih, jh, 0)$;

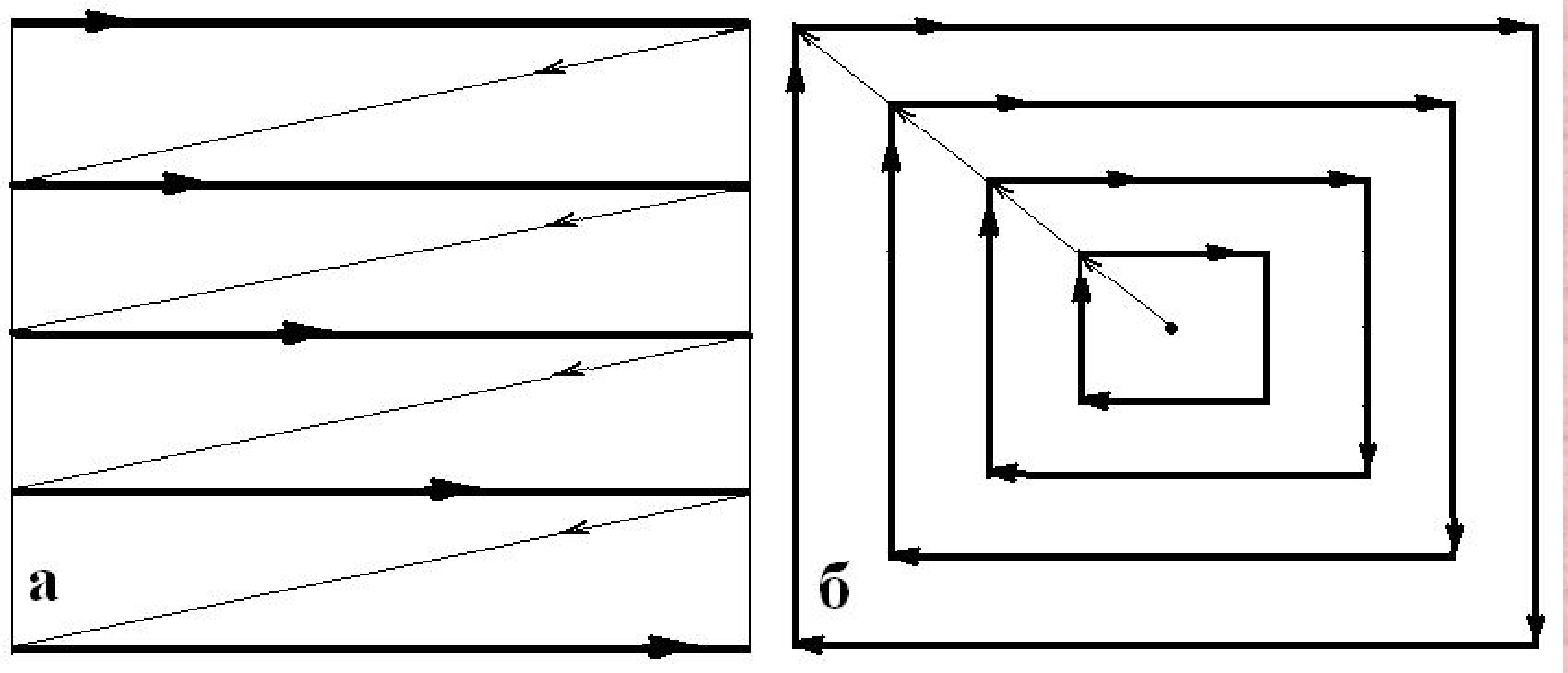
E_{01} - граничные значения, $\varphi_{ij1}(x, y, 0)$ - начальные условия.

Вычислительные методы исследования можно разбить на группы: 1) разработка новых сеточных алгоритмов явных и неявных; 2) разработка различных видов сеток, в том числе адаптивных; 3) исследование задач с жесткими переменными по времени и по пространству, приводящих к чередованию быстрых и медленных изменений переменных.

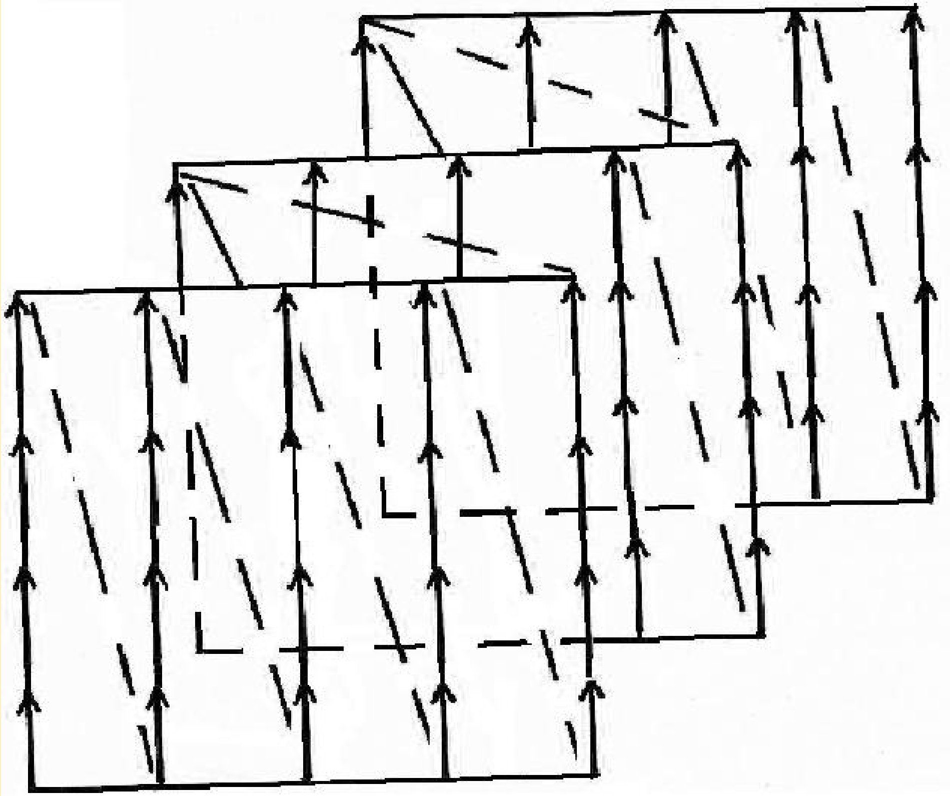
В меньшей степени исследованы автоволновые процессы при наличии сложных граничных условий, и гетерогенности областей изменения переменных. Учет гетерогенности и сложных граничных условий приводит к значительному возрастанию технических трудностей приближенных вычислений

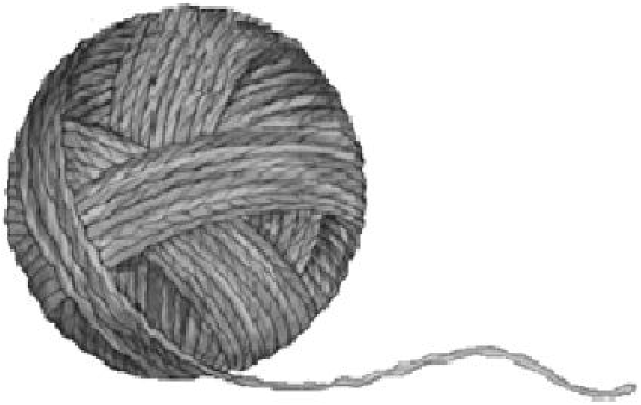
Рассматривается метод исследования нелинейных уравнений в частных производных параболического типа – метод сканирования, предназначенный для получения решений в гетерогенных областях сложной геометрии. Метод заключается в предварительном создании с помощью сканирования области траекторий, которые учитывают одновременно сложные граничные условия и гетерогенность области.

Двумерные траектории сканирования



Трехмерные траектории сканирования





Траектория сканирования должна образовывать в D компактное множество. Если обозначить множество точек траектории сканирования E, то $E \subset D$ и E – компактное множество. Компактность $E \subset D$ позволяет указать на траектории сканирования E точки $M(l_k)$ ($k \in N$, l_k – расстояние от начала траектории E до точки M) такие, что

$$\rho(M(l_k), A_{ij}) < \varepsilon,$$

где ε может быть как угодно малым за счет определенного выбора сканирующей траектории и точек $M(l_k)$. Точки $M(l_k)$ могут лежать на E неравномерно и образовывать всюду плотное множество.

Сформулируем этот метод применительно к нахождению приближенных решений уравнения при использовании сеточного метода прямых, что приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Образование траекторий сканирования для простоты рассмотрим для случая прямоугольной области D с узлами на пересечении линий прямоугольной сетки $A_{ij}(i\Delta x, j\Delta y)$ $(i=1,\ldots,N_1;\ j=1,\ldots,N_2)$ (общее число точек равно $N=N_1N_2$). Считаем $\Delta x=\Delta y=1$.

Описание метода сканирования

1. Все элементы $A_{ij} \in D, \quad (i=1,...,N_1; j=1,...,N_2)$ располагаются последовательно на «ведущей» траектории S, получаемой сканированием области D (подобно телевизионной развертке или любой другой) и нумеруются последовательно числами натурального ряда. Предполагается, что $S \subset D$ является компактным множеством в D. При сканировании каждой точке $A_{ij} \in D, \quad (i=1,...,N_1; j=1,...,N_2)$ ставится в однозначное соответствие натуральный номер k $(1,...,N)$ на траектории сканирования. Таким образом, между точками A_{ij} и точками с номером k на траектории сканирования задается однозначное преобразование $L : L(A_{ij}) = k$.

2. Создается еще l траекторий сканирования $S_i \ (i=1,...,l)$, будем их называть вспомогательными (для прямоугольной сетки $l=4$), которые предназначены для учета связи элемента $A_{ij} \in D, \quad (i=1,...,N_1; j=1,...,N_2)$ с соседними. На вспомогательных траекториях $S_i \ (i=1,...,l)$ указываются номера соседних элементов, с которыми связан элемент $A_n, \quad (n \in N),$ на «ведущей» траектории S в предположении, что соответствующий соседний элемент вспомогательной траектории является элементом «ведущей» траектории.

3. Метод интегрирован с программной средой Matlab-7 и включают определение границы Γ области D средствами программного обеспечения Matlab-7 путем предварительной маркировки области D.

4. Для учета граничных условий создается еще одна траектория сканирования, аналогичная ведущей, будем называть её граничной траекторией, и содержащая N элементов. В случае если точка лежит на границе $A_{ij}^{g} \in \tilde{A}$, то ей присваивается соответствующий номер $L(A_{ij}^{g}) = k^{g}$ ведущей траектории, всем другим точкам присваивается номер $k = 0$.

5. Для учета гетерогенности области D на ведущей и вспомогательных траекториях наносятся номера точек соответствующей области. Учет наличия границ между областями производится с помощью граничной траектории как в пункте 4.

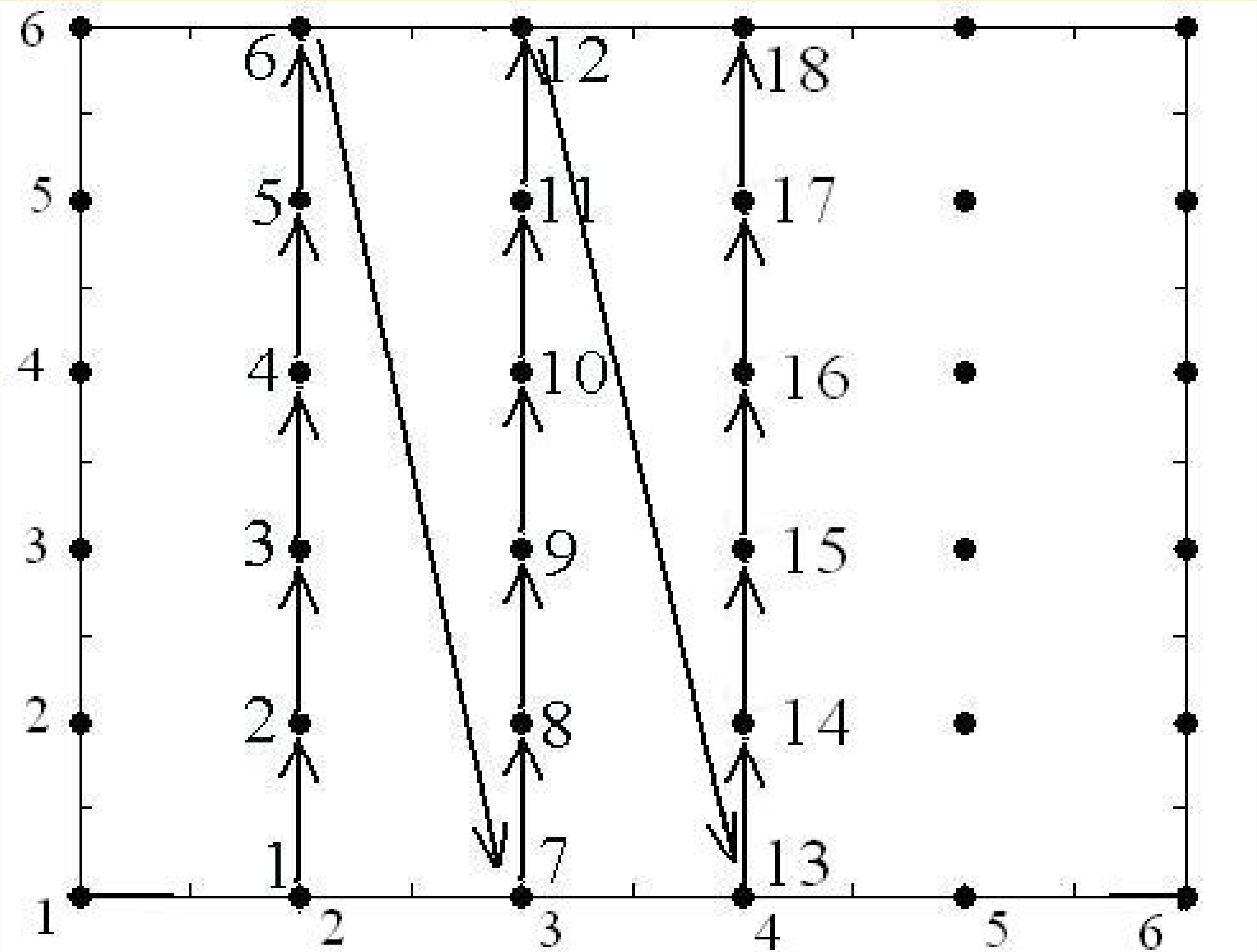
6. Создание «ведущей» траектории, вспомогательных траекторий сканирования, учет граничных условий, определение границы Г области D производится с помощью вспомогательной предпрограммы, производящей свою работу до начала работы основной программы.

7. Производится расчет членов, обусловленных диффузионными связями, переменных, обусловленных граничными условиями и обусловленных гетерогенностью области D. Эти расчеты производятся в основной программе с помощью ведущей траектории сканирования, вспомогательных и граничной. Практически в выбранной системе программирования Matlab-7 производится составление одномерного вектора правых частей системы нелинейных дифференциальных уравнений (3). Полученный одномерный вектор используется в качестве входных данных для решения жестких систем дифференциальных уравнений (3) средствами Matlab-7, с которыми интегрируется метод сканирования.

8. С помощью обратного преобразования, имеющего вид $L^{-1}: L^{-1}(k) = A_{ij}$, по известной «ведущей» траектории и расположению ее элементов в области D полученные с помощью Matlab-7 решения системы (3) для элементов «ведущей» траектории отображаются на исходную область D.

Метод сканирования интегрирован со средой Matlab-7, образуя единую систему. Это позволяет эффективно осуществить ввод и последующий учет граничных условий для задач Неймана, Дирихле и смешанных краевых задач. Наличие гетерогенности областей учитывается естественным образом аналогично тому, как учитываются граничные условия.

Пример реализации метода сканирования для двумерной области



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Формирование вспомогательных траекторий

Ведущая траектория	Левая	Правая	Нижняя	Верхняя
8	2	14	7	9
9	3	15	8	10
10	4	16	9	11

Возможности метода сканирования

1) Эффективный учет любых граничных условий (Неймана, Дирихле, смешанных);

2) Эффективный учет гетерогенности области, в которой производится исследование;

3) Возможность исследования систем с жесткими переменными по времени и пространственным координатам;

4) Возможность учета любых глобальных связей в задачах исследования многих глобально связанных осцилляторов (диффузионные связи с ближайшими соседями- частный случай глобальных связей).

5) Позволяет значительно упростить базовую программу вычислений за счет удаления большого количества условных операторов, учитывающих граничные условия и гетерогенность области;

6) Позволяет в случаях сложных границ области значительно уменьшить время вычислений;

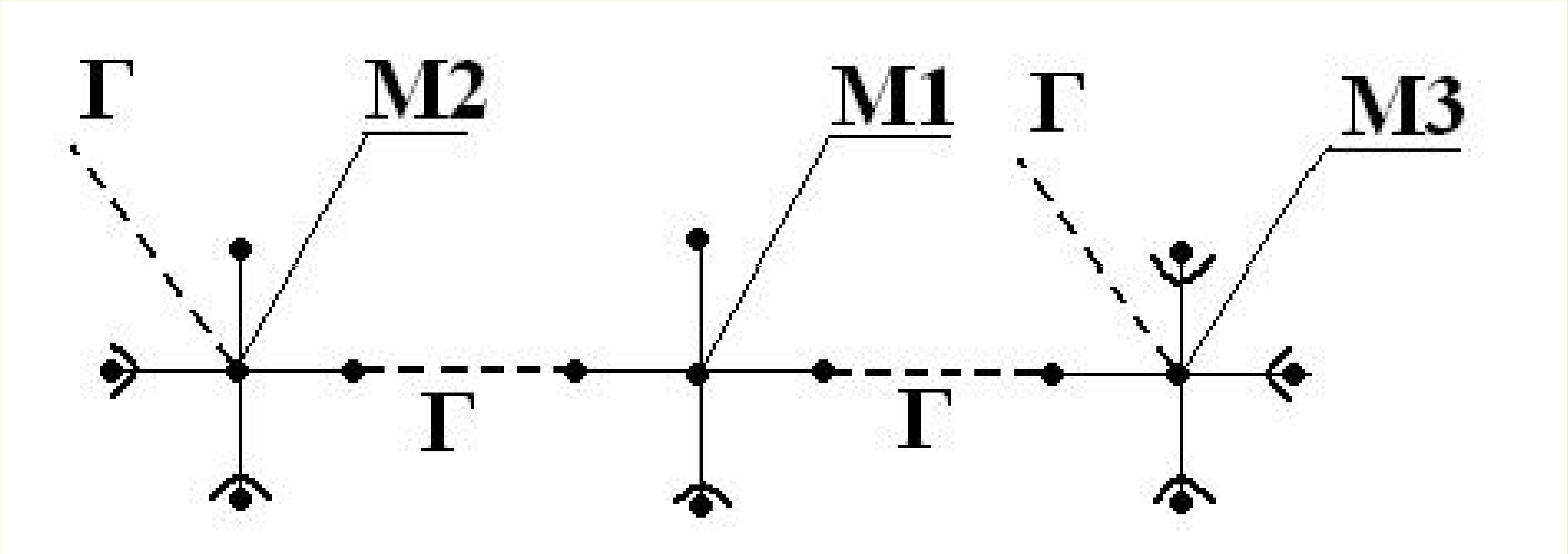
7) Допускает применение «свободных» граничных условий;

8) Допускает быструю модификацию программы при идентификации математической модели динамической системы.

Свободные граничные условия

Метод сканирования позволяет естественным образом учесть так называемые «свободные» граничные условия. В условиях «свободной» границы не имеет место ни одно из условий: Дирихле, Неймана или смешанное. На свободной границе видоизменяются связи с соседними точками. Например, может отсутствовать связь граничной точки с одной, или двумя, или с большим числом соседних точек.

Иллюстрация граничных точек «свободных границ»: М1 – отсутствует 1 граничная точка; М2 – отсутствуют 2 граничные точки; М3 – отсутствуют 3 граничные точки



Условия со «свободными» границами можно отразить, задавая величины связей данной точки (i,j), лежащей на границе Г области D, с соседними точками (l,k).

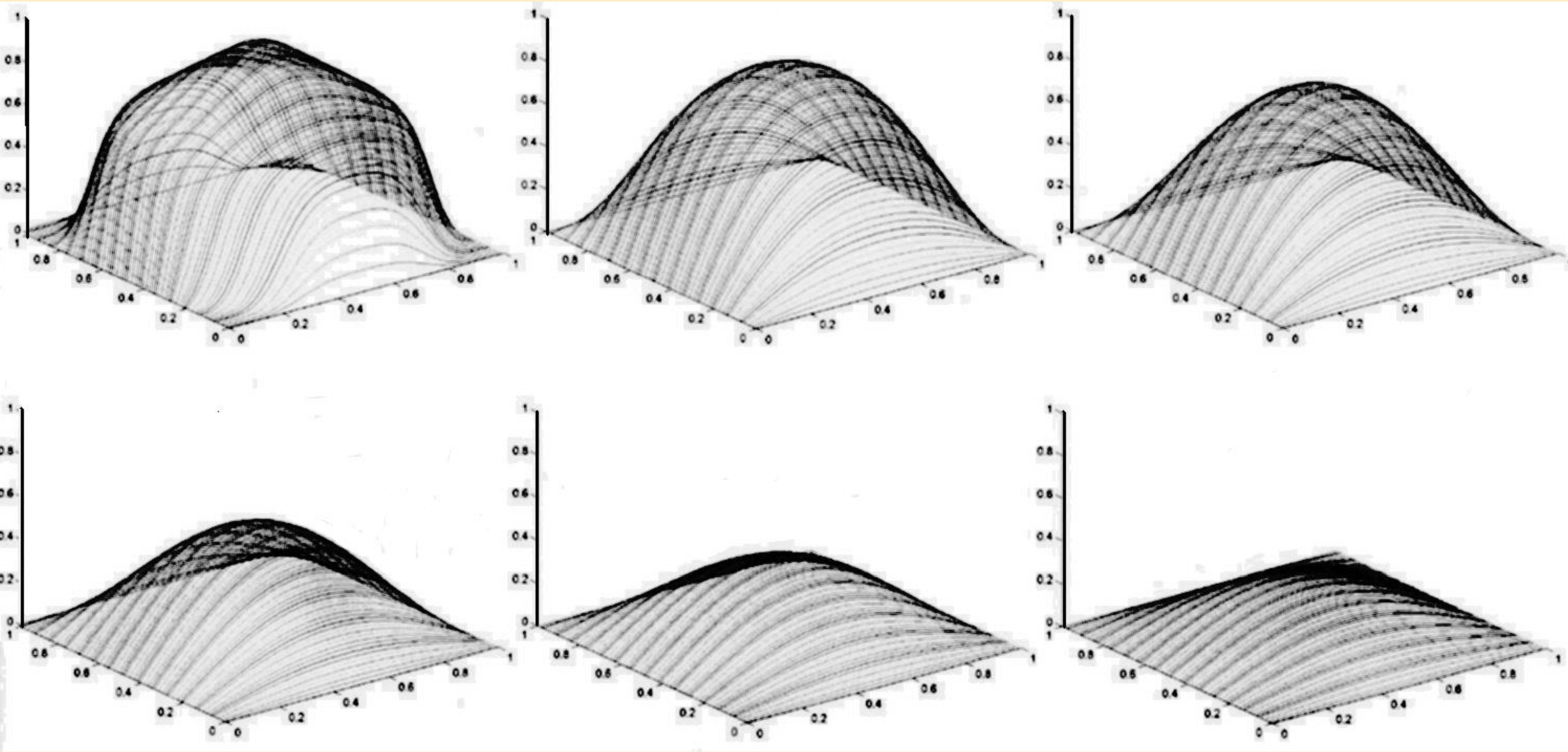
$$\alpha_{i,j;l,k}^{(g)} = \begin{cases} \alpha_{i,j;l,k}^{(0)}, \textit{если точка } (l,k) \in D \\ 0, \textit{если точка } (l,k) \notin D \end{cases}$$

Для проверки метода сканирования была решена задача Дирихле для прямоугольной области $x, y \in [0;1]$ для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

с граничными условиями $u(0,0,t) = u(0,1,t) = u(1,0,t) = u(1,1,t) = 0$.

Расчеты проведены с помощью стандартного сеточного метода и по методу сканирования, результаты в пределах точности вычислений идентичны.

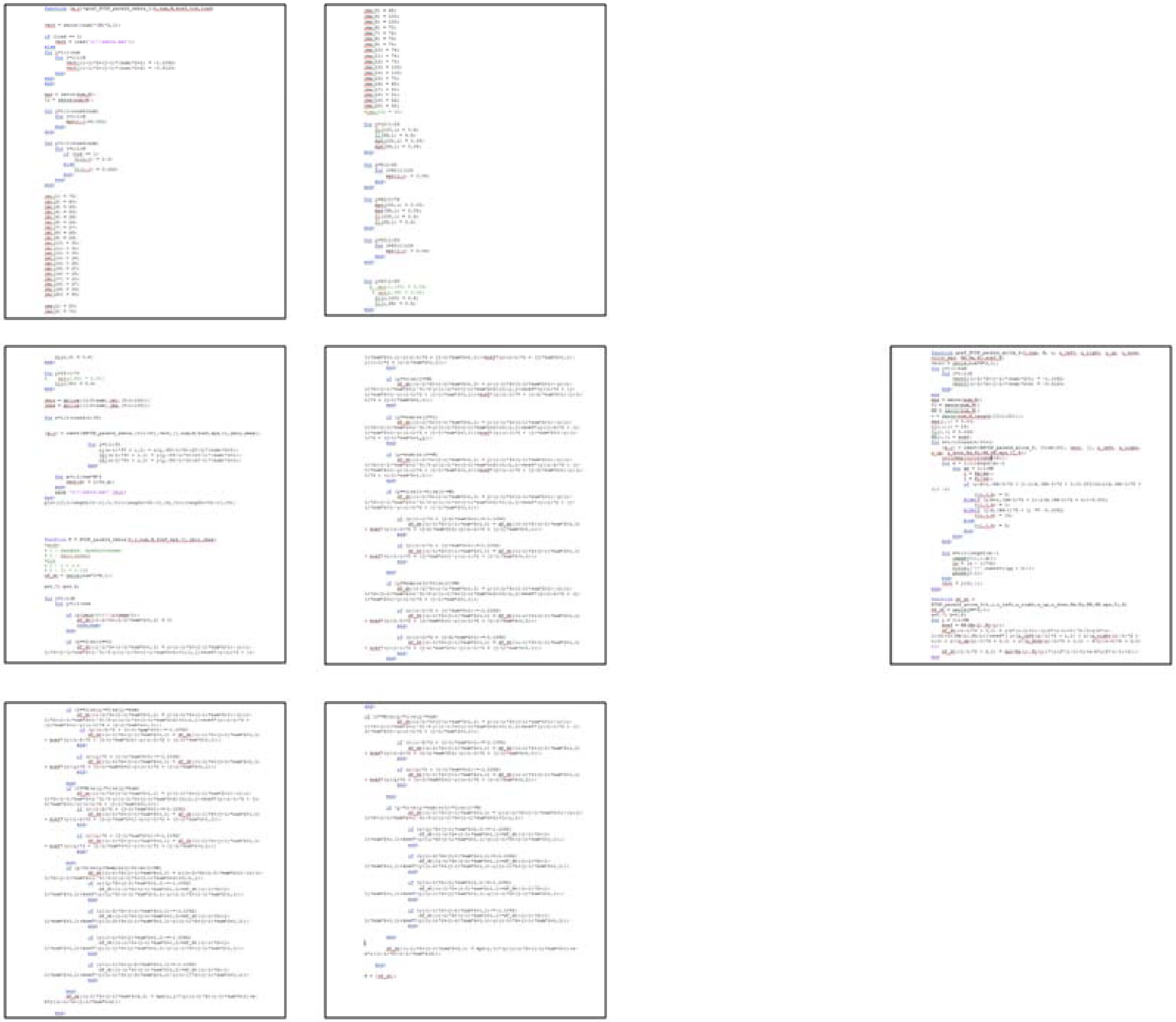


Результаты расчетов распределения переменной в различные моменты времени для задачи Дирихле, выполненные с помощью метода сканирования и явной сеточной схемы

Уменьшение объема программы

Метод сканирования при расчетах в областях со сложными границами позволяет значительно уменьшить объём программы. Это уменьшение обусловлено значительным сокращением количества условных операторов, учитывающих граничные условия. Программа для расчета распространения электрического возбуждения по проводящей системе сердца при распечатке на бумажный носитель занимает около 6,0 страниц, а при использовании метода сканирования 1 страницу.

Иллюстрация уменьшения объема программы. Слева – программа, написанная без использования метода сканирования, справа – с использованием метода сканирования



Уменьшение времени счета

Метод сканирования при расчетах в областях со сложными границами позволяет значительно уменьшить время вычислений. Это уменьшение обусловлено эффективным удалением лишних частей рассматриваемой области. Отношение времени счета обычным методом t_0 ко времени счета со сканированием t_c при расчете распространения электрического возбуждения в проводящей системе сердца в зависимости от времени вычислений иллюстрируется следующим слайдом.

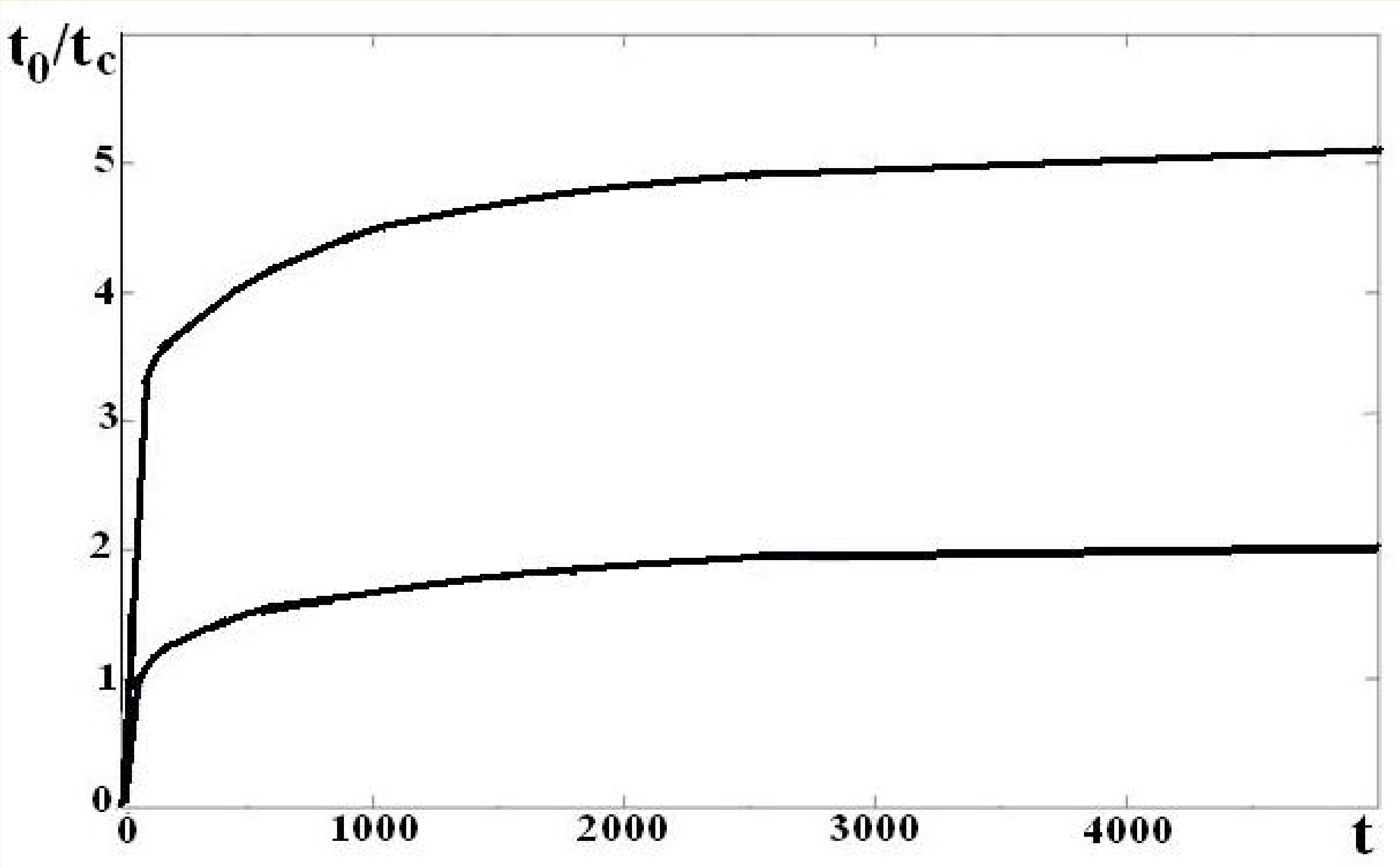
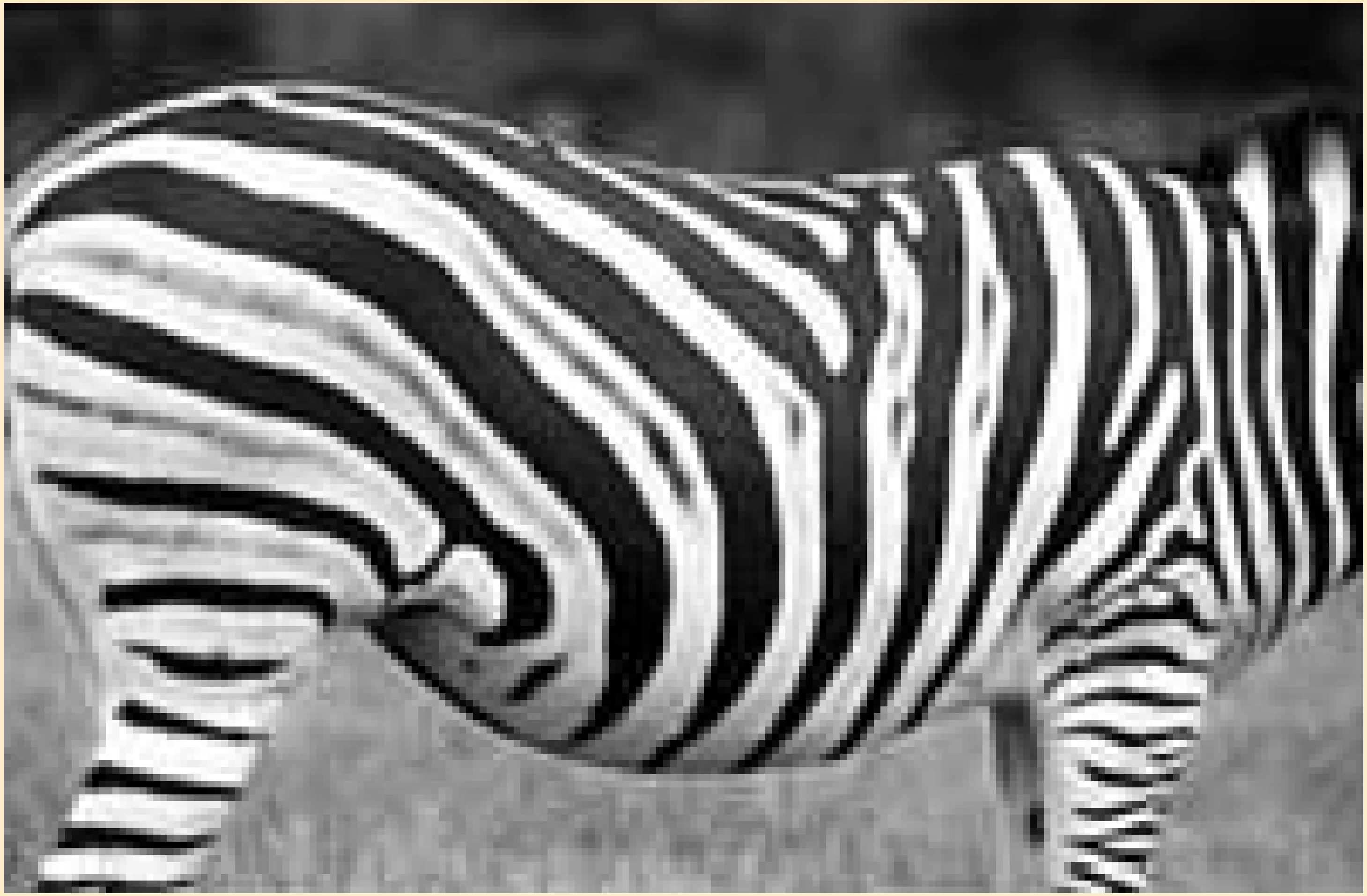
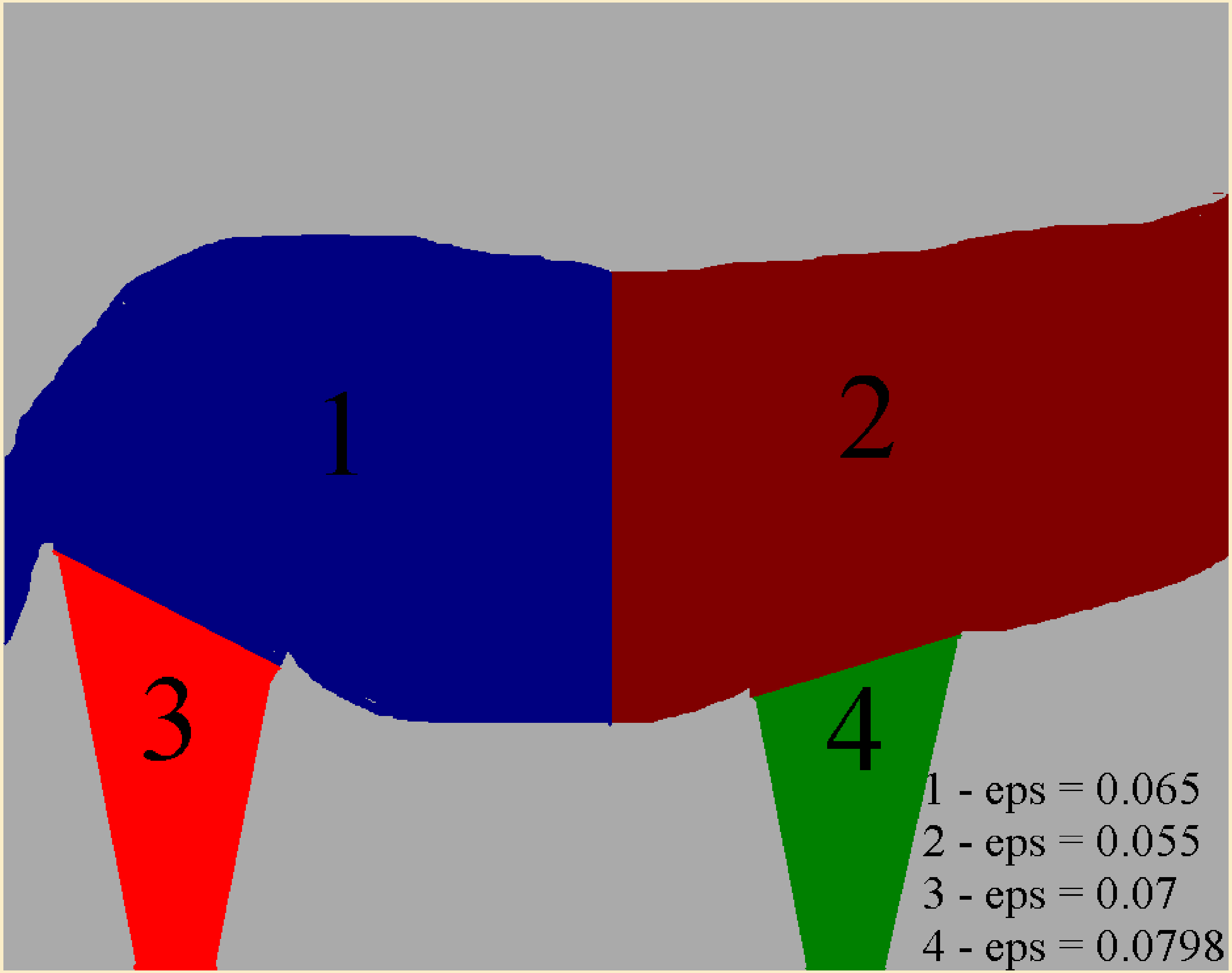
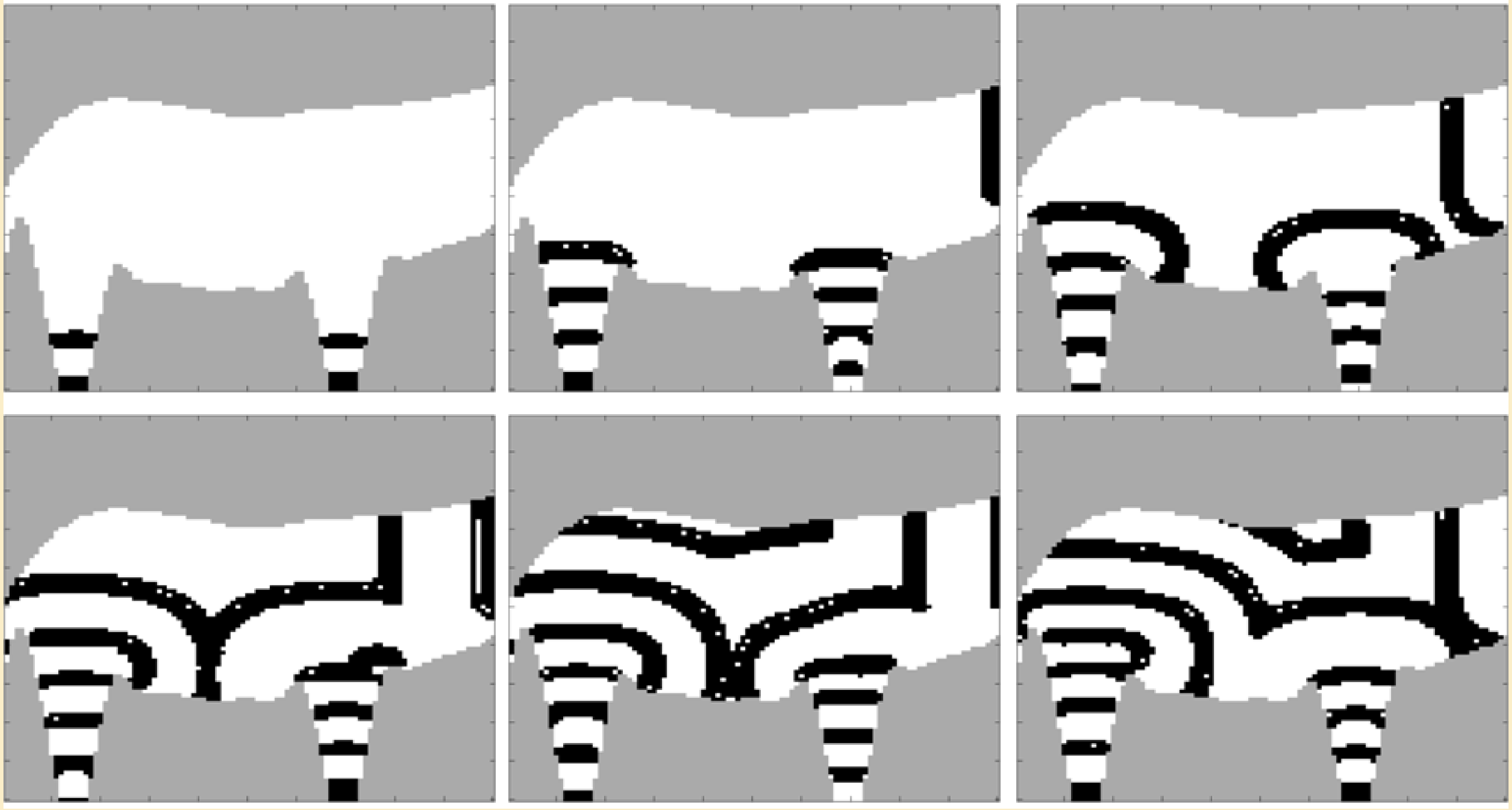


График отношения времени счета обычным методом t_0 ко времени счета со сканированием t_c зависимости от времени вычислений. Нижняя линия – результаты для прямоугольной области верхняя линия – для проводящей системы сердца. По оси абсцисс - время расчетов, по оси ординат отношение времени расчета старой программы ко времени расчета программы со сканированием

Пример применения метода сканирования для расчета автоволновых процессов в гетерогенной области (моделирование морфогенеза окраски зебры)




1
2
3
4
1 - eps = 0.065
2 - eps = 0.055
3 - eps = 0.07
4 - eps = 0.0798

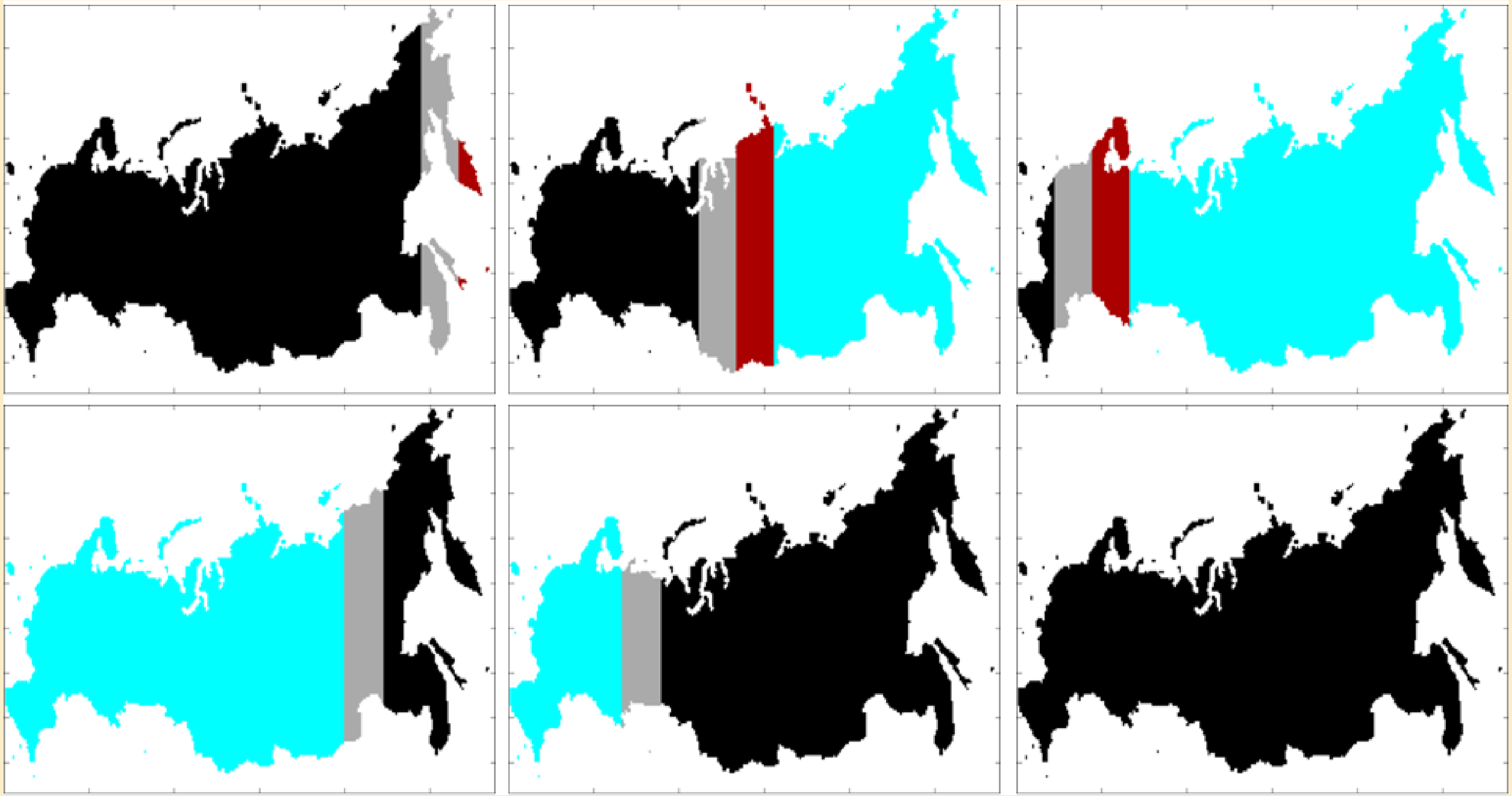


Применение метода сканирования для областей со сверхсложными границами

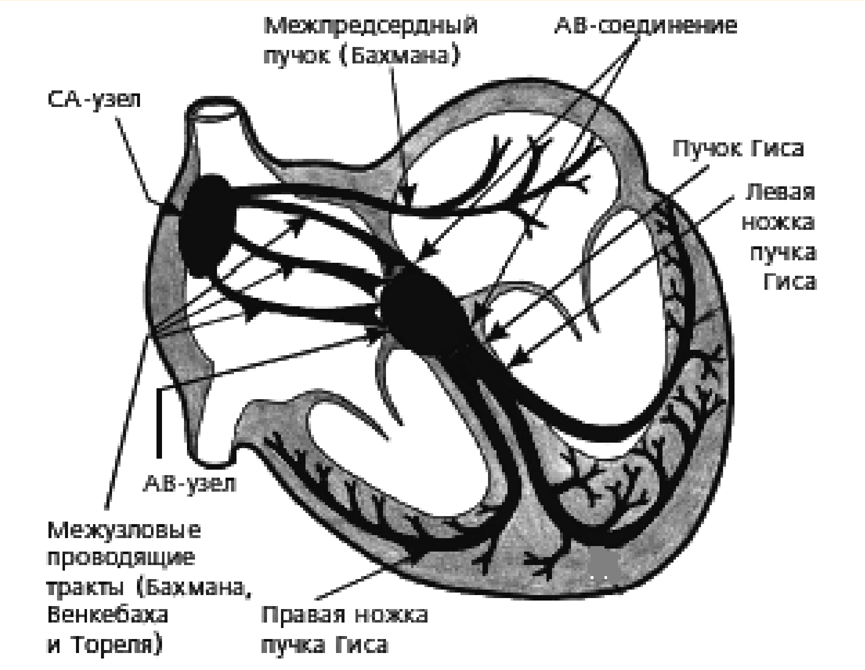
Для иллюстрации применимости метода сканирования для исследования автоволновых процессов в областях с очень сложными границами была рассмотрена задача о движении светового дня по территории России. Для описания движения светового дня были использованы уравнения Фитцхъю – Нагумо в предположении, что рассматриваемая территория является активной средой.

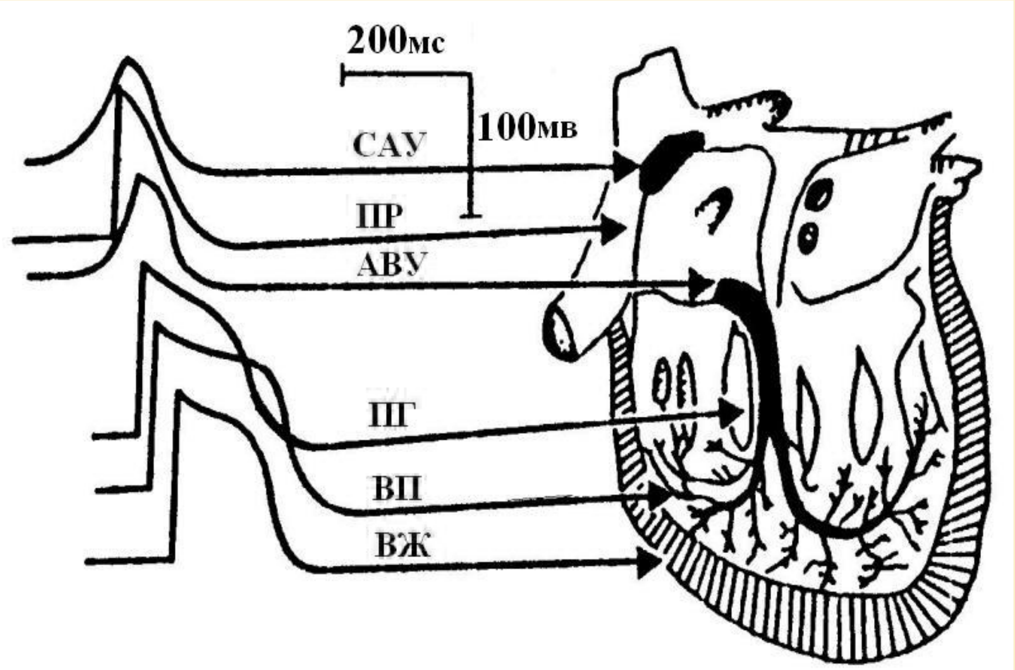
Карта территории России была просканирована с помощью линейной развертки, получена форма траектории её границы. Произведены расчеты движения светового дня в соответствии с описанием метода сканирования, описанного выше в п.п. 1-8. Результаты расчетов иллюстрируются на слайде. Движение светового дня происходит справа налево. Голубым цветом показан световой день, серым - сумерки, красным – рассвет, и черным цветом показана ночь.

Движение светового дня по территории России



Результаты исследования распространения возбуждения в двумерной проводящей системе сердца с помощью метода сканирования





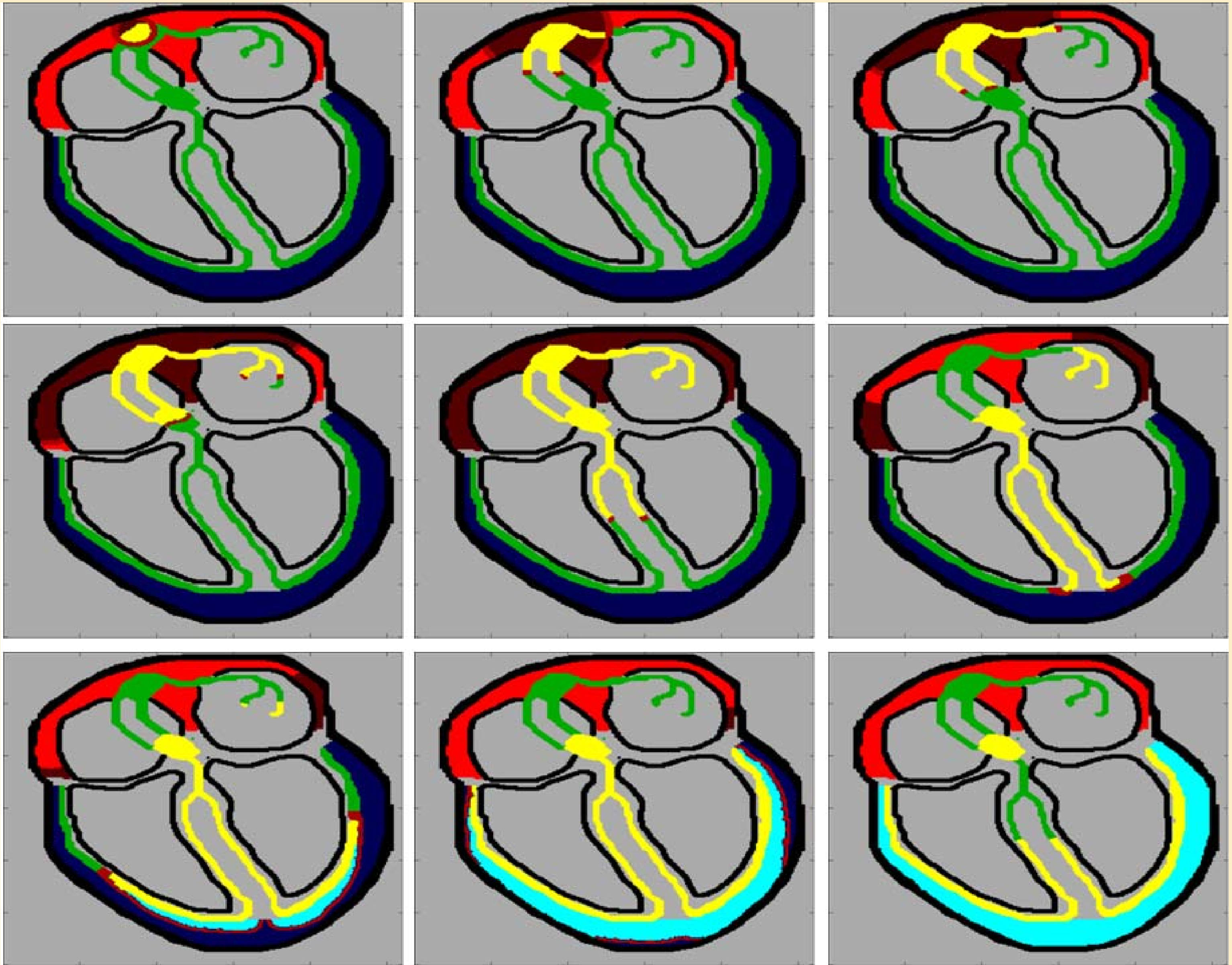
Схематическое изображение проводящей системы сердца: на рисунке слева схема проводящей системы сердца; справа - электрические потенциалы в отдельных частях проводящей системы

Отдельные фазы распространения возбуждения по двумерной проводящей системе

Цветовые маркеры динамики возбуждения проводящей системы

	Состояние покоя	Возбуждение	Рефрактерность
Проводящая система	Зеленый	Темно-красный	Желтый
Желудочки, предсердия	Синий	Темно-красный	Бордовый
Эндокард	Ярко-красный	Темно-красный	Голубой
Перикард	Черный	Черный	Черный
Межжелудочковая и межпредсердная перегородки	Серый	Серый	Серый

Результаты расчетов распространения электрического потенциала, произведенном согласно предлагаемому методу сканирования



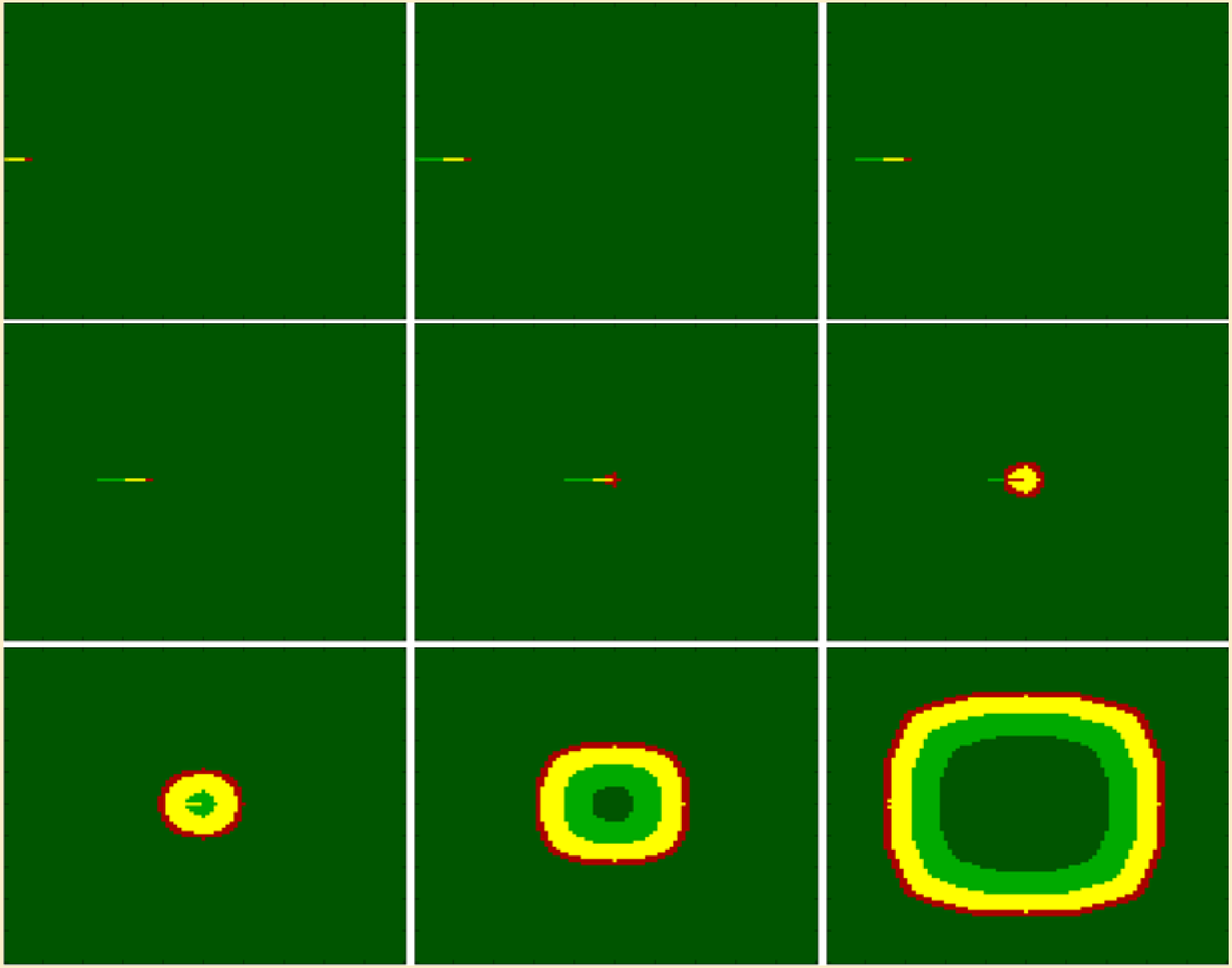
Обобщения методов сканирования

Метод сканирования может быть использован для приближенного решения систем нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа

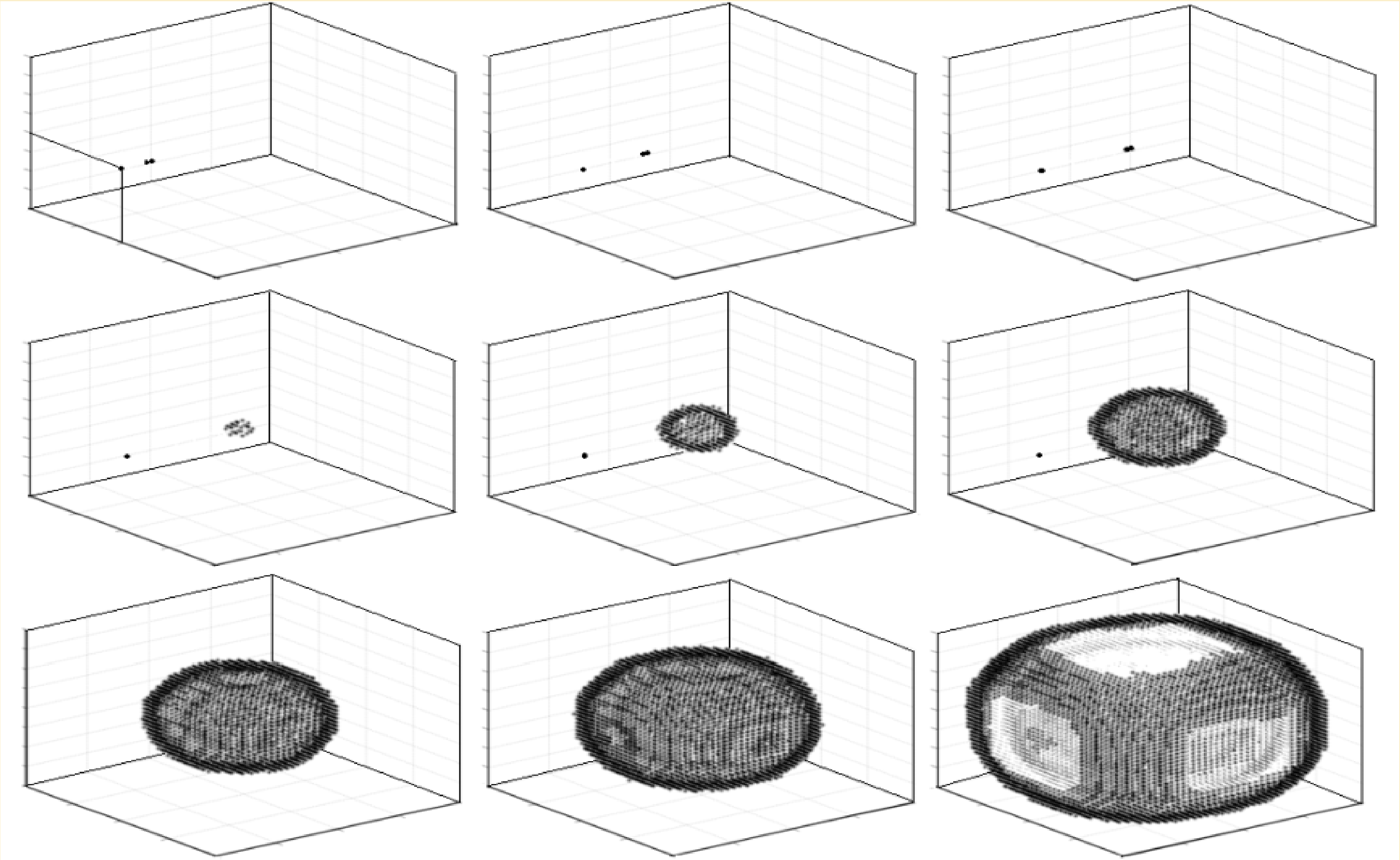
Метод сканирования может быть использован для исследования многих нелинейных динамических систем с любыми глобальными связями

Сканирование позволяет естественным образом учесть более дальнодействующие виды связи, например, связи с двумя соседями, тремя соседями и любым количеством соседей. Использование связи с двумя соседями позволяет, например, управлять скоростью движения автоволны – ускорять или замедлять скорость движения фронта и т. д. В системах с глобальными связями при использовании метода сканирования были получены уединенные активные волны – солитоны в активных средах. Такие солитоны были получены не только в одномерной среде, но в двумерной и трехмерной средах.

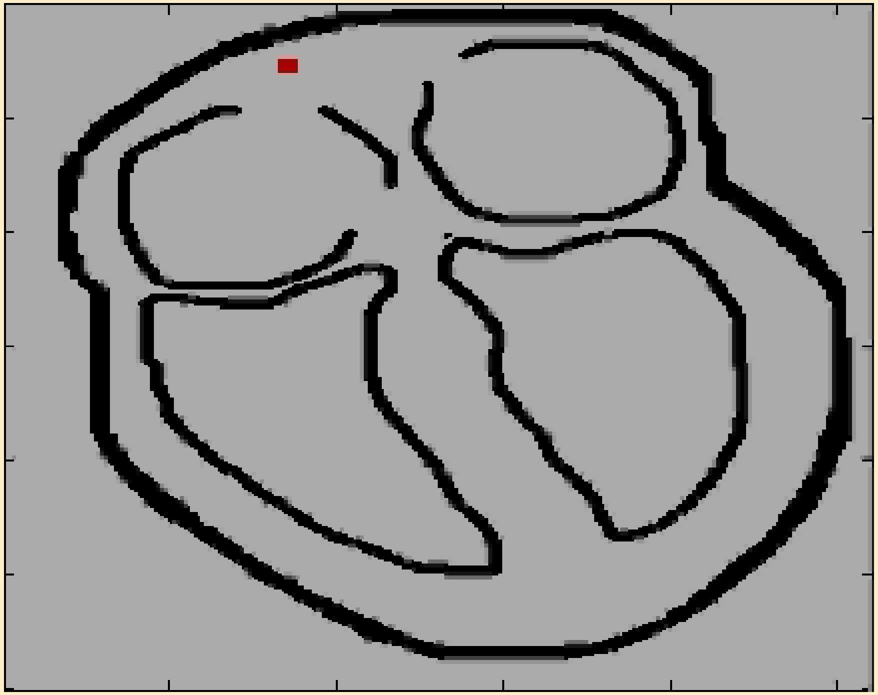
Солитон в двумерной активной среде

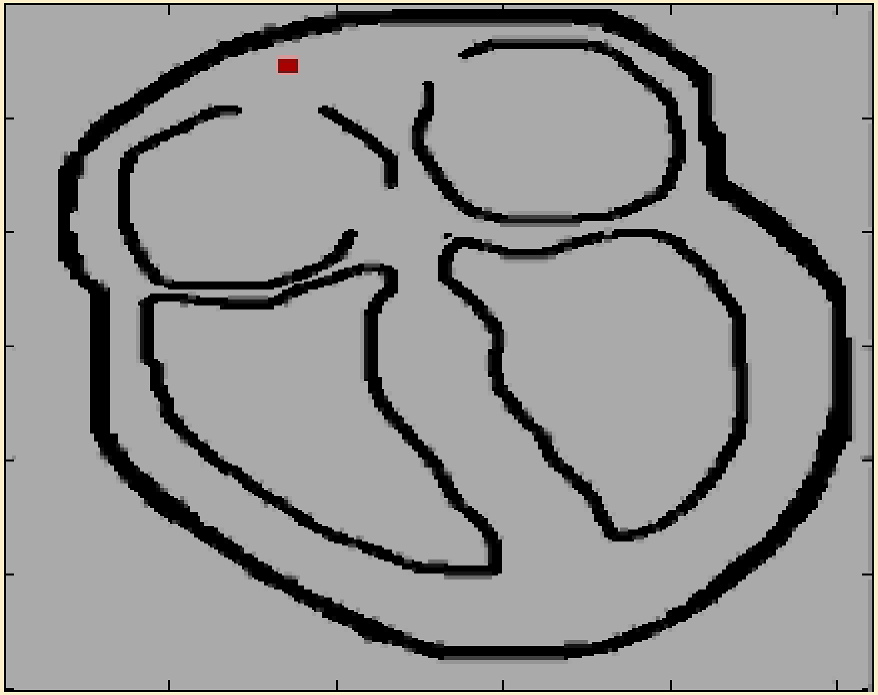


Солитон в трехмерной активной среде



Распространение возбуждения в проводящей системе в реальном времени





Выводы

1. Метод сканирования эффективен при решении краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов в случае сложной геометрии границ и гетерогенной структуры области.
2. Метод сканирования эффективно сочетается с языком программирования MATLAB, использующим матричное представление данных.
3. Метод сканирования позволяет значительно упростить программное обеспечение задачи при сложной геометрии границ области ввиду значительного уменьшения условных операторов, описывающих поведение вблизи и на границе области.
4. Метод сканирования в случае сложной, особенно ветвистой, структуры области позволяет значительно уменьшить время счета при заданной точности вычислений

Благодарю за внимание